제 2 교시

2019학년도 Aurora 모의고사 문제지

수학 영역

(가 형)

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 자신이 선택한 유형(가 형/나 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

몰아치는 바람은 단 한 걸음도 못 가게 해

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

MathAurora

2019학년도 Aurora 모의고사 문제지

제 2 교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. $S(4,\ 2)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2. $\lim_{x\to 0+}\dfrac{\tan^2 x}{x\ln(x+1)}$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ e

3. 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2,\ k)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{a}=20$일 때, k^2의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

4. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{1}{2}$ ② -1 ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

5. 좌표공간에서 두 평면 $x-2y+z=1$와 $x+z=1$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{6}$

6. 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$의 값은? [3점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

7. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

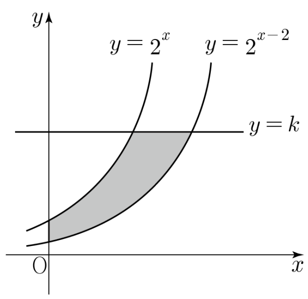
$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(A), \qquad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{12}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

8. 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-2}$과 y축, 직선 $y=k\,(k>1)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{17}{4\ln2}$일 때, k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2\ln 2}$　② $\frac{1}{\ln 2}$　③ $\frac{3}{2\ln 2}$　④ $\frac{2}{\ln 2}$　⑤ $\frac{5}{2\ln 2}$



9. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가

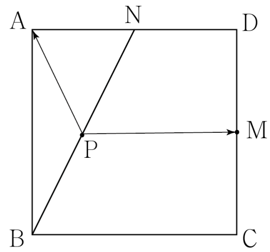
$$x=(2+\sin t)\cos t, \qquad y=(2+\sin t)\sin t$$

이다. $t=\pi$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

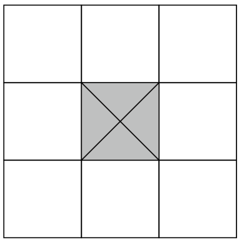
① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

10. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD와 변 AD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 선분 BN 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}$의 최댓값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10



11. 그림과 같이 3×3 모양의 정사각형 격자에서 가운데에 있는 격자를 제외한 8개의 격자에 1부터 8까지의 자연수를 소수들은 서로 이웃하지 않도록 채우는 경우의 수는? (단, 회전하여 같은 경우는 한 가지로 센다.) [3점]



① 144 ② 216 ③ 288 ④ 360 ⑤ 432

12. 좌표평면에서 두 포물선 $C_1 : y^2 = 12x$와 $C_2 : y^2 = -8(x+1)$의 초점을 각각 F_1, F_2라 하자. 곡선 C_1 위의 점 A와 곡선 C_2 위의 점 B에 대하여

$$\overline{\mathrm{AF}_1} = \overline{\mathrm{BF}_2} = \overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}$$

가 성립할 때, 사각형 $\mathrm{ABF}_2\mathrm{F}_1$의 넓이는? [3점]

① $18+8\sqrt{2}$ ② $18+10\sqrt{2}$ ③ $20+10\sqrt{2}$
④ $24+10\sqrt{2}$ ⑤ $24+12\sqrt{2}$

13. 연속함수 $f(x)$가 실수 a와 모든 실수 x에 대하여

$$f(x-a)+f(-x)=a$$

일 때, $g(a)=\int_0^a f(x-a)\,dx$라 하자. $\int_{-3}^{3} g(a)\,da$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

14. 36의 약수가 하나씩 적힌 총 9개의 숫자카드가 들어있는 주머니가 있다. 예린이는 이 주머니에서 임의로 숫자카드 한 장을 골라 아래 규칙에 따라 게임을 진행한다.

> 뽑은 숫자카드에 적힌 수의 양의 제곱근을
> $a\sqrt{b}$ (단, a는 자연수이고, b는 최소의 자연수이다.)
> 라 했을 때, a 또는 b에 3, 6, 9가 들어있으면 게임을 끝내고, 그렇지 않으면 뽑은 카드를 주머니에 다시 넣고 위의 게임을 반복한다.

예린이가 두 번째에 게임을 종료했을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

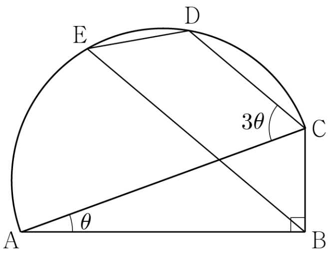
15. 라플라스 클럽 회원의 평균 공부시간(분)은 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다고 한다. 라플라스 회원 중 100명을 임의추출하여 모평균 m을 95%의 신뢰도로 추정한 신뢰구간의 길이가 a이고, 99%의 신뢰도로 추정한 신뢰구간의 길이가 b일 때, $b-a=1.24$이다. σ의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.58)=0.495$ 이다.) [4점]

① 50 ② 40 ③ 30 ④ 20 ⑤ 10

16. 함수 $f(x)=x^3+2x-1$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. $h'(2)$의 값은? [4점]

① $\frac{78}{5}$ ② $\frac{79}{5}$ ③ 16 ④ $\frac{81}{5}$ ⑤ $\frac{82}{5}$

17. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$, $\angle \mathrm{CAB}=\theta$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 지나지 않고 선분 AC를 지름으로 하는 반원을 그리고 반원 위에 점 D를 $\angle \mathrm{DCA}=3\theta$가 되도록 잡는다. 또한 직선 BE와 직선 CD가 평행하도록 반원 위에 점 E를 잡는다. 사각형 DEBC의 넓이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) \times \overline{\mathrm{DE}}}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

18. 함수 $y=f(x)$를 매개변수 $t\,(t>0)$로 나타내면

$$\begin{cases} x=at-\frac{b}{t} \\ y=4|\ln t| \end{cases}$$ (단, a, b는 양의 상수이다.)

이고, 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) $f'(0)=\sqrt{2}$
(나) 함수 $f(x)$는 오직 $x=-1$에서만 <u>미분가능하지 않다.</u>

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

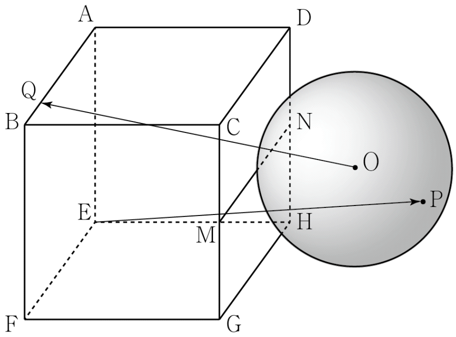
19. 다음은 빨간 공 n개, 파란 공 $2n$개, 노란 공 $3n$개로 총 $6n$개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 $3n$개를 뽑았을 때, 노란 공과 빨간 공 각각의 개수보다 파란 공의 개수가 더 많을 확률을 구하는 과정이다. (단, n은 짝수인 자연수이다.)

> 뽑힌 빨간 공, 파란 공, 노란 공의 수를 각각 r, b, y라 하면
>
> $r+b+y=3n \cdots$ (*)
>
> 이다.
>
> i) $0 \le b \le n$일 때
>
> 노란공은 반드시 n개 이상 뽑히게 되므로 이 경우는 파란 공이 가장 많을 수 없다.
>
> ii) $n < b \le \frac{3n}{2}$일 때
>
> (*)에서 $r+y=3n-b$ 이고, $0 \le r \le n$이므로 이를 만족하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_{3n-b}+b-\boxed{(가)}$ (가지)이다. 이때, 항상 $r<b$이므로 $b \le y \le 3n-b$이면 파란 공이 가장 많을 수가 없다.
>
> 만약, $r=y$이면 (*)에서 $2r=3n-b<2n$, $r<n$이므로 $r=y<n$이다. 즉, 파란 공이 가장 많다. 따라서 파란 공이 가장 많은 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_{3n-b}+3b-5n-1$이다. 그런데 $n<b \le \frac{3n}{2}$이므로 파란 공이 가장 많은 경우의 수는 $\boxed{(나)}$ (가지)이다.
>
> iii) $\frac{3n}{2} < b \le 2n$일 때
>
> 어떠한 경우에도 파란 공이 항상 많다. 따라서 경우의 수는 $\boxed{(다)}$ (가지)이다.
>
> i), ii), iii)에 의해 파란 공이 가장 많을 확률은
>
> $$\frac{\boxed{(나)}+\boxed{(다)}}{{}_{6n}\mathrm{C}_{3n}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(6)}{g(4)}+h(4)$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육면체 ABCD－EFGH가 있다. 두 선분 CG, DH의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 선분 MN의 중점에서 정육면체와 외접하는 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 구가 있다. 구 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EP}}|$의 최댓값은? [4점]



① $24+4\sqrt{11}$ ② $28+4\sqrt{11}$ ③ $32+4\sqrt{11}$ ④ $36+4\sqrt{11}$ ⑤ $40+4\sqrt{11}$

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)>0$, $f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=e^{f(x)}-f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 2이고, 두 극솟값은 같다.
>
> (나) $\int_{0}^{3}|f'(x)g(x)|\,dx=2\int_{2}^{3}|f'(x)g(x)|\,dx$

$f(-4)$의 값은? [4점]

① -126　② -117　③ -108　④ -99　⑤ -90

단답형

22. 이산확률변수 X가 $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=16$을 만족시킬 때, $\mathrm{V}(3X+4)$의 값을 구하시오. [3점]

23. $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan x=0$일 때, 모든 $\tan x$의 값의 합을 구하시오. [3점]

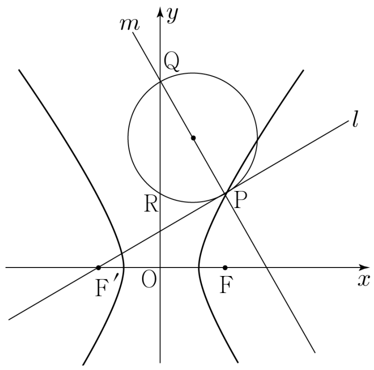
24. 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 곡선 $y=(\log_2 x)^2+2\log_2 x+3$의 최댓값을 구하시오. [3점]

25. 곡선 $2x^2-5xy+3y^2+5y+6=0$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

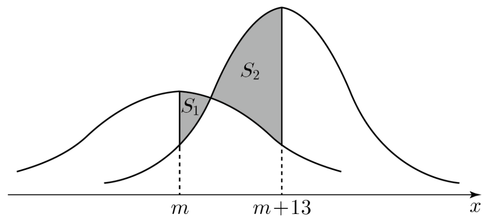
26. 다음 조건을 만족하는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=12$
(나) $ab+c$는 짝수이다.

27. 좌표평면에서 쌍곡선 $x^2 - ky^2 = 1$의 두 초점은 각각 $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$, $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$ 이다. 점 F'을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선 l이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, P를 지나고 l에 수직인 직선 m이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 선분 PQ를 지름으로 하는 원이 y축과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=3$이다. $60k$의 값을 구하시오. [4점]



28. 다음 그림은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4\sigma^2)$, $\mathrm{N}(m+13,\ \sigma^2)$을 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수의 그래프를 나타낸 것이다.



그림과 같이 $m \le x \le m+13$인 범위에서 두 곡선과 직선 $x=m$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선과 직선 $x=m+13$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면, 다음 조건을 만족한다.

(가) $S_2 - S_1 = 0.13$
(나) $\mathrm{P}(Y \ge 120) = 0.22$

$m+3\sigma$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.39)=0.15$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.78)=0.28$로 계산한다.) [4점]

29. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=r^2$가 있다. 구 S와 xy평면의 교선 위의 세 점 A, B, C와 구 S 위의 점 D는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}=24$
(나) $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

선분 AD의 평면 $x+3y-z=18$ 위로의 정사영의 길이의 최댓값을 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오. [4점]

30. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+ax+b\right)e^x$에 대하여 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다. (단, a, b는 상수)

(가) $g(e)=1$
(나) 함수 $\sqrt{\left|g(x)-\frac{x}{e}\right|}$가 미분가능하지 않은 x의 개수가 1이다.

$\int_{e}^{5e^5} \frac{\{g(x)-1\}^2}{x}dx=p+q\ln 5$일 때, $3p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이고, ln5는 무리수이다.) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.